Петербургский Государственный Университет Путей Сообщения

Лабораторная работа №1

“Анализ предельного поведения вероятностей событий”

Вариант - 8

Выполнил:
студент группы ПВТ-711
Круглов В.А.

Проверил:

Санкт-Петербург
2010 год

Цель работы

Определение вероятности $\overline{P}(\mathrm{t})$. Построение графика этих вероятностей и оценка момента времени, при котором вероятности становятся стационарными. Нахождение этих стационарных вероятностей.

Вариант индивидуального задания

$$P(0) = (1,0,0,0,0) \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Теоретическая часть

Математическая теория систем с очередями изучает случайные процессы, связанные с числом требований, находящихся в данный момент времени в системе. В основе математической модели широкого класса СМО лежат Марковские случайные процессы. Марковские процессы обладают тем свойством, что если известно значение процесса в момент времени t, то вероятности будущих значений процесса при $s > t$ не зависит от прошлых значений процесса при $s < t$, другими словами, вероятности значений Марковского процесса после момента времени t не зависят от того, какие значения принимали и как вел себя процесс до момента времени t. Марковские случайные процессы с дискретным множеством состояний называют цепями Маркова.

Основные используемые формулы.

Дифференциальные уравнения Колмагорова имеют вид:

1. $P'(t) = P(t)\Lambda$
2. $\overline{\mathrm{P}}'(\mathrm{t}) = \overline{\mathrm{P}}(\mathrm{t})\Lambda$

где $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ - инфинитезимальная матрица $\lambda_{ij} \geq 0, i \neq j$, и $\lambda_{ii} < 0, \sum_j \lambda_{ij} = 0$.
Решение этих уравнений имеет вид:

3. $\mathrm{P}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{\Lambda \mathrm{t}}$
4. $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{t}) = \overline{\mathrm{P}}(0)\mathrm{e}^{\Lambda \mathrm{t}}$

Уравнения для стационарных вероятностей состояний $\overline{P} = (p_0, p_1, p_2, \dots)$

5. $\overline{\mathrm{P}}\Lambda = 0,\ \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{p}_{\mathrm{k}} = 1$, где $\overline{\mathrm{P}}$ - это стационарные вероятности, удовлетворяющие при $\mathrm{t} > 0$ уравнению $\overline{P} = \overline{P} \cdot P(t)$, которое означает, что если процесс начинается в состоянии I с вероятностью p_i, то и в любой последующий момент времени он будет находиться в состоянии I с той же вероятностью p_i.

Код программы для решения задачи

1я часть. Определение $\overline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{t})$ по формуле 4.

```
P0=[1 0 0 0 0];
m=length(P0);
Lambda=[-10 2 3 1 4; 1 -8 2 3 2; 0 1 -7 3 3; 2  0 1 -5 2; 1 2 1 2 -6];
h=0.01;
Tfin=input('Введите финальный момент времени');
t=0:h:Tfin;
k=length(t);
P=zeros(m,k);
for j=1:k
   P(:,j)=(P0*expm(Lambda*t(j))');
end;
plot(t,P(1,:),t,P(2,:),t,P(3,:));
disp(P(:,k-1:k));
```

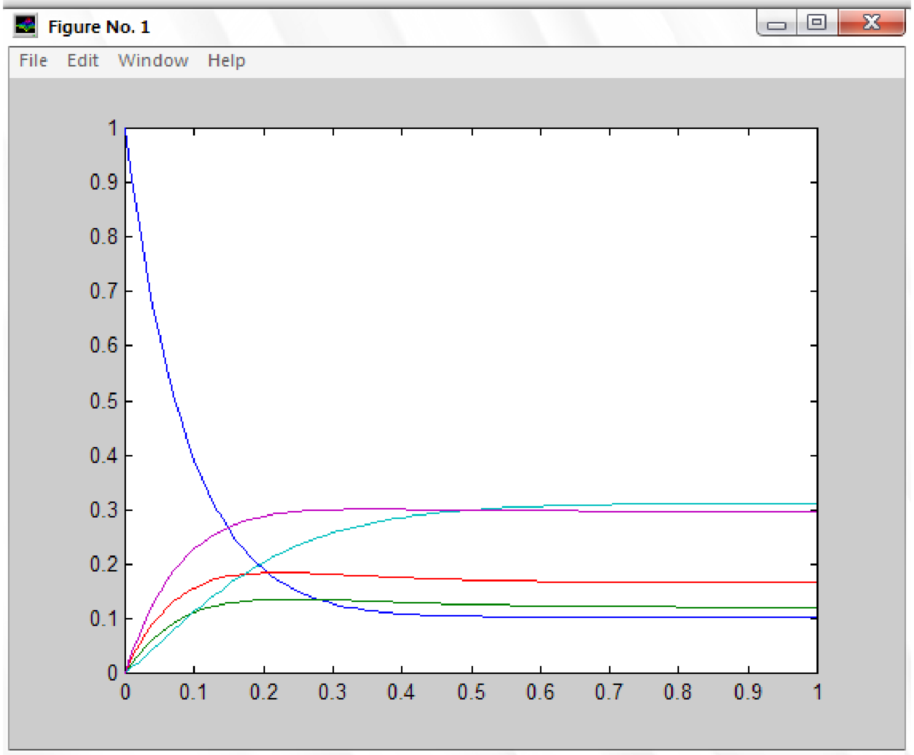
2я часть. Определение стационарных вероятностей $\overline{\mathrm{P}}$ по уравнениям 5.

```
Lambda=[-10 2 3 1 4; 1 -8 2 3 2; 0 1 -7 3 3; 2 0 1 -5 2; 1 2 1 2 -6];
s=length(Lambda(1,:));
ed=ones(1,s);
A=cat(2,Lambda(:,1:s-1),ed');
B=zeros(1,s);
B(s)=1;
Pst=B/A;
```

Результаты работы программы

1я часть. Определение $\overline{P}(t)$ по формуле 4.

Введем конечный интервал времени $t = 1$ и получим следующий график:



0.1041	0.1041
0.1212	0.1212
0.1663	0.1663
0.3116	0.3117
0.2969	0.2969

2я часть. Определение стационарных вероятностей $\overline{\mathrm{P}}$ по уравнениям 5.

Результатом работы программы являются следующие стационарные вероятности:
Pst = 0.1042 0.1210 0.1662 0.3119 0.2968

Вывод

В данной лабораторной работе были определены стационарные вероятности $\overline{P}(t)$, построен график по которому можно оценить момент времени, при котором вероятности становятся стационарными. Кроме того, подсчитаны эти стационарные вероятности. Таким образом, в работе показано, что если процесс начинается в состоянии I с вероятностью p_i, то и в любой последующий момент времени он будет находиться в состоянии I с той же вероятностью p_i.