

**Петербургский Государственный Университет Путей Сообщения**

**Лабораторная работа №4**

**“Вычисление числовых характеристик открытых и замкнутых СМО ”**

Вариант - 8

Выполнил:  
студент группы ПВТ-711  
Круглов В.А.

Проверил:

Санкт-Петербург  
2010 год

## Цель работы

Вычисление в MATLAB характеристик  $p_0, p_k, p_L, p_w, \bar{p}_w, \bar{Q}, \bar{q}, \bar{q}_s, \bar{W}, T, F_w(t), F_T(t)$  открытой СМО  $M|M|\infty|\infty$  со следующими параметрами:  $\lambda = 20.4, \mu = 5.2, m = \infty, n = \infty$ .

Сравнение их с характеристиками, полученными при моделировании.

Построение графика функции распределения времени ожидания.

Вычисление в MATLAB характеристик  $p_0, p_k, p_L, p_w, \bar{p}_w, \bar{Q}, \bar{q}, \bar{q}_s, \bar{W}, T, F_w(t), F_T(t)$  замкнутой СМО  $M|M|m|n|S$  со следующими параметрами:  $\lambda = 17.5, \mu = 8.1, m = 2, n = 10, S = 10$ .

Сравнение их с характеристиками, полученными при моделировании.

Построение получившейся траектории процесса  $Q(t)$  и оценка основных характеристик смоделированной системы.

## Теоретическая часть

Основными характеристиками СМО являются следующие:

1.  $p_0$  – вероятность того, что в системе нет требований (простой системы);
2.  $p_k$  – вероятности стационарных состояний;
3.  $p_L$  – вероятность потери требования;
4.  $p_w$  – вероятность того, что требование будет обслужено после некоторого ожидания;
5.  $\bar{p}_w$  – вероятность того, что поступившее требование будет обслужено без ожидания;
6.  $\bar{Q}$  – среднее число требований, находящихся в СМО;
7.  $\bar{q}$  – среднее число требований, находящихся в очереди;
8.  $\bar{q}_s$  – среднее число занятых приборов;
9.  $\bar{W}$  – среднее время ожидания начала обслуживания;
10.  $T$  – среднее время пребывания требования в СМО;
11.  $F_w(t) = P(W < t)$  – функция распределения времени ожидания;
12.  $F_T(t) = P(T < t)$  – функция распределения времени пребывания в СМО.

Для системы  $M|M|\infty|\infty$

$$p_0 = e^{-\rho}$$
$$p_k = \frac{e^{-\rho} \rho^k}{k!}, \quad 1 \leq k < \infty;$$
$$p_L = 0$$
$$p_w = 0$$
$$\bar{p}_w = 1 - \rho$$
$$\bar{Q} = \rho$$
$$\bar{q} = 0$$
$$\bar{q}_s = \rho$$
$$\bar{W} = 0$$
$$T = \frac{1}{\mu}$$

Для системы  $M|M|m|n|S$

$$p_0 = \left( 1 + \sum_{k=1}^{\min(m,S)} \rho^k \frac{S!}{k!(S-k)!} + \sum_{k=\min(m,S)+1}^M \rho^k \frac{S!}{(S-k)! m! m^{k-m}} \right)^{-1} =$$
$$= \begin{cases} 1 + \sum_{k=1}^m \rho^k \frac{S!}{k!(S-k)!} + \sum_{k=m+1}^M \rho^k \frac{S!}{(S-k)! m! m^{k-m}}, & S > m \\ (1 + \rho)^{-S}, & S \leq m \end{cases}$$

$$p_k = \begin{cases} p_0 \rho^k \frac{S!}{k!(S-k)!}, & 1 \leq k \leq m \\ p_0 \rho^k \frac{S!}{(S-k)! m! m^{k-m}}, & m+1 \leq k \leq M \end{cases}, \quad S > m$$

$$p_k = \begin{cases} p_0 \rho^k \frac{S!}{k!(S-k)!}, & 1 \leq k \leq S, \end{cases} \quad S \leq m$$

$$p_L = \begin{cases} p_{m+n}, & S > m+n \\ 0, & S \leq m+n \end{cases}$$

$$p_W = \begin{cases} \sum_{k=m}^{M-1} p_k, & S > m \\ 0, & S \leq m \end{cases}$$

$$\bar{p}_W = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m-1} p_k, & S > m \\ 0, & S \leq m \end{cases}$$

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^M k p_k$$

$$\bar{q} = \sum_{k=\min(m,S)+1}^M (k-m) p_k = \begin{cases} \sum_{k=\min(m,S)+1}^M (k-m) p_k, & S > m \\ 0, & S \leq m \end{cases}$$

$$\bar{q}_s = \sum_{k=1}^{\min(m,S)} k p_k + m \sum_{k=\min(m,S)+1}^M p_k = \begin{cases} \sum_{k=1}^m k p_k + m \sum_{k=m+1}^M p_k, & S > m \\ \sum_{k=1}^S k p_k, & S \leq m \end{cases}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{m\mu} \sum_{k=\min(m,S)+1}^M (k-m) p_k$$

$$T = \bar{W} + \frac{1}{\mu}$$

$$F_W(t) = 1 - e^{-\mu t} \sum_{k=m}^{M-1} p_k \sum_{l=0}^{k-m} \frac{(\mu t)^l}{l!}$$

$$F_T(t) = \mu \int_0^t e^{-\mu u} F_W(t-u) du, \quad t > 0$$

*Код программы для решения задачи*

### **Вычисление числовых характеристик открытой СМО**

```
lambda=20.4; mu=5.2;
rho=lambda/mu;
K=input('Сколько вероятностей вычислять ');
x=1:K-1;
slavel=ones(1,K-1)*rho;
slave2=slavel./x;
slave=cumprod(slave2);
disp('Вероятность простоя');
PO=exp(-rho); disp(PO);
disp('Вероятность состояний 1,...,K-1');
Psost=slave*PO; disp(Psost);
disp('вероятность потери требования PL = 0');
disp('вероятность того, что требование')
disp('будет обслужено после некоторого ожидания Pw = 0');
disp('вероятность того, что поступившее');
```

```

disp('требование будет обслужено без ожидания   pw = 1');
disp('среднее число требований, находящихся в СМО   Q = ');
disp(rho);
disp('среднее число требований, находящихся в очереди   q = 0');
disp('среднее число занятых приборов   qs = ');
disp(rho);
disp('среднее время ожидания начала обслуживания   W = 0');
disp('среднее время пребывания требования в СМО   T = ');
sd=1/mu;
disp(sd);
t=0:0.01:10;
FW=1-exp(-mu*t); plot(t,FW);

```

### Вычисление числовых характеристик замкнутой СМО

```

lambda=17.5; mu=8.1;
m=2; n=10; S=10;
rho=lambda/mu;
M=min(m+n,S);
x=1:M;
x1=ones(1,M-m)*m;
x2=S-x+1;
xx=[x(1:m),x1]; xx1=xx./x2;
slavel=ones(1,M)*rho;
slave2=slavel./xx1;
slave=cumprod(slave2);
disp('Вероятность простоя');
PO=1/(1+sum(slave)); disp(PO);
disp('Вероятность состояний 1,...,M');
Psost=slave*PO; disp(Psost);
disp('Вероятность потери требования');
PL=Psost(M); disp(PL);
disp('Вероятность ожидания перед обслуживанием');
Pw=sum(Psost(m:M-1)); disp(Pw);
disp('Вероятность обслуживания без ожидания');
Pww=PO+sum(Psost(1:m-1)); disp(Pww);
disp('Среднее число заявок в системе');
Qsr=x*Psost; disp(Qsr);
xq=x-xx;
disp('Среднее число заявок в очереди');
qsr=xq((m+1):M)*(Psost((m+1):M)); disp(qsr);
disp('Среднее число занятых приборов');
qs=xx*Psost; disp(qs);
disp('Среднее время ожидания');
W=(1:n)/m/mu*(Psost(m+1):M); disp(W);
disp('Среднее время пребывания в системе');
T=W+1/mu; disp(T);

```

### Результаты работы программы

#### Вычисление числовых характеристик открытой СМО

Вероятность простоя 0.0198

Вероятность состояний 1,...,K-1

0.0776 0.1522 0.1990 0.1952 0.1532 0.1002 0.0561 0.0275 0.0120

вероятность потери требования PL = 0

вероятность того, что требование будет обслужено после некоторого ожидания Pw = 0

вероятность того, что поступившее требование будет обслужено без ожидания pw = 1

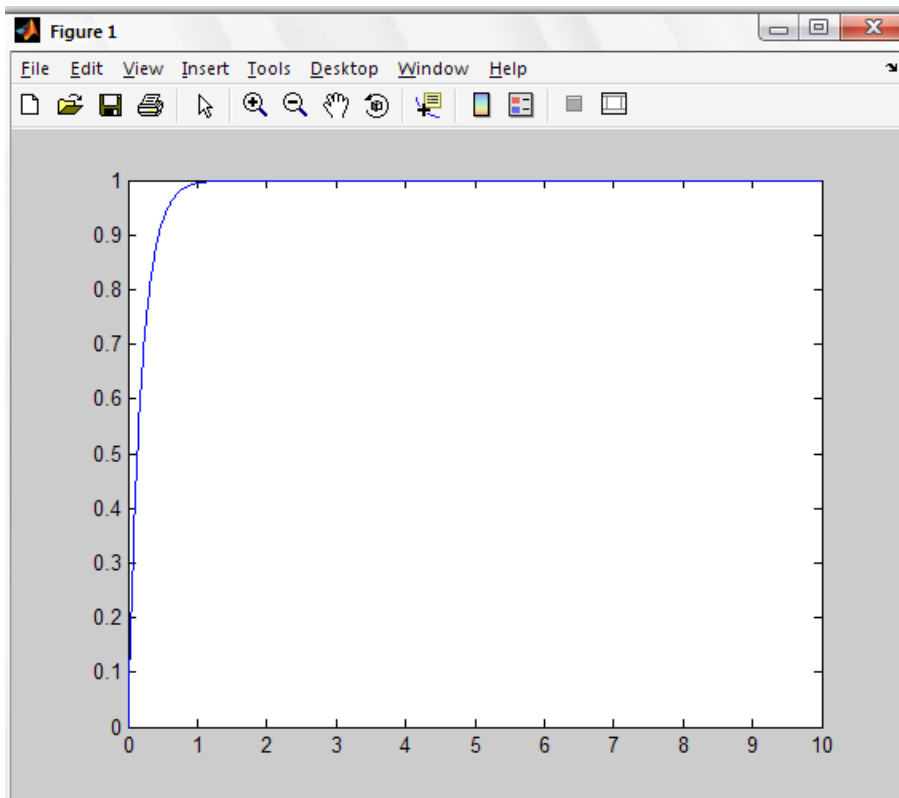
среднее число требований, находящихся в СМО Q = 3.9231

среднее число требований, находящихся в очереди q = 0

среднее число занятых приборов qs = 3.9231

среднее время ожидания начала обслуживания W = 0

среднее время пребывания требования в СМО T = 0.1923



### Вычисление числовых характеристик замкнутой СМО

Вероятность простоя  $2.5232e-008$

Вероятность состояний  $1, \dots, M$

0.0000 0.0000 0.0000 0.0003 0.0022 0.0121 0.0524 0.1698 0.3668 0.3962

Вероятность потери требования 0.3962

Вероятность ожидания перед обслуживанием 0.6038

Вероятность обслуживания без ожидания  $5.7036e-007$

Среднее число заявок в системе 9.0743

Среднее число заявок в очереди 7.0743

Среднее число занятых приборов 2.0000

Среднее время ожидания 20.3705

Среднее время пребывания в системе 20.4940

### Сравнение результатов

полученных характеристик с теми, что были получены при моделировании.

При моделировании были получены следующие результаты:

1. Вероятность простоя = 0.016
2. Вероятности состояний  $1, \dots, N$ : 0.0732 0.1503 0.1942 0.1921 0.1508
3. Среднее число заявок в системе = 0.

1. Вероятности состояний  $1, \dots, 10$   
0.0017 0.0018 0.0533 0.0082 0.0228 0.0770 0.0046 0.2513 0.3572 0.2189
2. Вероятность ожидания = 0.9932
3. Среднее число заявок в системе = 8.2199

## *Вывод*

В данной работе были вычислены характеристики открытой системы массового обслуживания  $M|M|\infty|\infty$ . Построен график распределения времени ожидания.

Было проведено сравнение полученных характеристик при вычислении с теми, что были получены при моделировании.

В данной работе были вычислены характеристики замкнутой системы массового обслуживания  $M|M|m|n|S$

Было проведено сравнение полученных характеристик при вычислении с теми, что были получены при моделировании.

Значения характеристик, полученных этими двумя способами, практически одинаковы. Следовательно, моделирование можно использовать для определения характеристик замкнутых систем