

**Петербургский Государственный Университет Путей Сообщения**

**Лабораторная работа №5**

**“Расчетно-графическая работа:  
«Анализ Марковских СМО»”**

Вариант - 8

Выполнил:  
студент группы ПВТ-711  
Круглов В.А.

Проверил:

Санкт-Петербург  
2010 год

## Цель работы

Используя средства системы MATLAB, провести анализ работы Марковской СМО. Вычислить основные показатели эффективности работы СМО теоретически и статистически, используя результаты моделирования.

## Условие задачи

На железнодорожном вокзале имеется одна касса, которая работает в режиме массового обслуживания  $M|M|1$ . Пассажиры подходят к кассе, образуя пуассоновский поток. В среднем пассажиры подходят за билетами каждые 30 секунд. Среднее время обслуживания одного пассажира – 25 секунд. Если кассир занят, образуется очередь.

## Решение

### 1. Кодировка Кендалла для данной СМО

$M|M|1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 2.5$ , (система с ожиданием)

$\lambda = 2$  (клиента/мин) – интенсивность прихода клиентов в систему; приход каждые 30 секунд или 2 клиента в минуту.

$v = 25$  сек (или  $25/60 = 5/12$  мин) – среднее время обслуживания одного клиента;

$\mu = 1/v = 2.5$  (клиентов/мин) – скорость обслуживания клиентов;

### 2. Формулы для распределения интервалов во входном потоке и формулы для распределения длительности обслуживания данной СМО

Распределение интервалов во входном потоке (показательное распределение):

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-2t}$$

Распределение длительности обслуживания (показательное распределение):

$$B(t) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - e^{-2.5t}$$

### 3. Диаграмма интенсивности переходов между состояниями данной СМО

$$\mu_k = \begin{cases} \lambda_k = \lambda \\ k\mu, & 1 \leq k \leq m \\ m\mu, & m \leq k \end{cases}$$

### 4. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для определения вероятностей состояний СМО в определенный момент времени T

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_k'(t) = -(\lambda + \mu k)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), & 1 \leq k \leq m \\ P_k'(t) = -(\lambda + \mu k)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + m\mu P_{k+1}(t), & m \leq k \end{cases} \quad \begin{matrix} k=1 \\ 1 \leq k \\ 1 \leq k \end{matrix}$$

### 5. Проверка условия наличия стационарного решения данной СМО

Для наличия стационарного решения должно выполняться условие:  $\frac{\rho}{m} < 1$ , где  $\rho = \lambda/\mu$  – загрузка системы на один прибор.

$\frac{\rho}{m} = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{2}{2.5 \cdot 1} = 0.8 < 1$ , следовательно, стационарное решение существует

### 6. Система уравнений для определения стационарных вероятностей состояний данной СМО

$$\begin{cases} t \rightarrow \infty, P_k(t) \rightarrow P_k, P_k'(t) \rightarrow 0 \\ 0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ 0 = -(\lambda + \mu k)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), & k=1 \\ 0 = -(\lambda + \mu k)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + m\mu P_{k+1}(t), & 1 \leq k \end{cases}$$

## Вычисление числовых характеристик СМО

```
lambda=2; mu=2.5; m=1;
rho=lambda/mu; rho_m= rho/m;
if rho_m>=1,
    disp('Стационарного режима не существует');
else
    disp('Стационарный режим существует');
    K=input('Сколько вероятностей вычислять? ');
    while K<=m
        disp('K должно быть не менее m+1');
        K=input('Сколько вероятностей вычислять? ');
    end;
    x=1:m;
    x1=ones(1,K-1-m)*m;
    xx=[x,x1];
    slavel=ones(1,K-1)*rho;
    slave2=slavel./xx;
    slave=cumprod(slave2);
    disp('Вероятность простоя');
    P0=1/(1+sum(slave(1:m-1))+slave(m)/(1-rho_m)); disp(P0);
    disp('Вероятность состояний 1, ...K-1');
    Psost=slave*P0; disp(Psost);
    disp('Вероятность ожидания перед обслуживанием');
    Pw=Psost(m)/(1-rho_m); disp(Pw);
    disp('Вероятность обслуживания без ожидания');
    Pww=1-Pw; disp(Pww);
    disp('Среднее число заявок в системе');
    k=1:m-1;
    Qsr=k*(Psost(1:m-1))+m*Pw+Psost(m)*rho_m/(1-rho_m)^2;
    disp(Qsr);
    disp('Среднее число заявок в очереди');
    qsr=Psost(m)*rho_m/(1-rho_m)^2; disp(qsr);
    disp('Среднее число занятых приборов');
    qs=Qsr-qsr; disp(qs);
    disp('Среднее время ожидания');
    W=qsr/lambda; disp(W);
    disp('Среднее время пребывания в системе');
    T=Qsr/lambda; disp(T);
    t=0:0.01:10;
    FW=1-Pw*exp(-(m*mu-lambda)*t);
    plot(t,FW);
end;
```

## Результаты полученные на основе вычислений

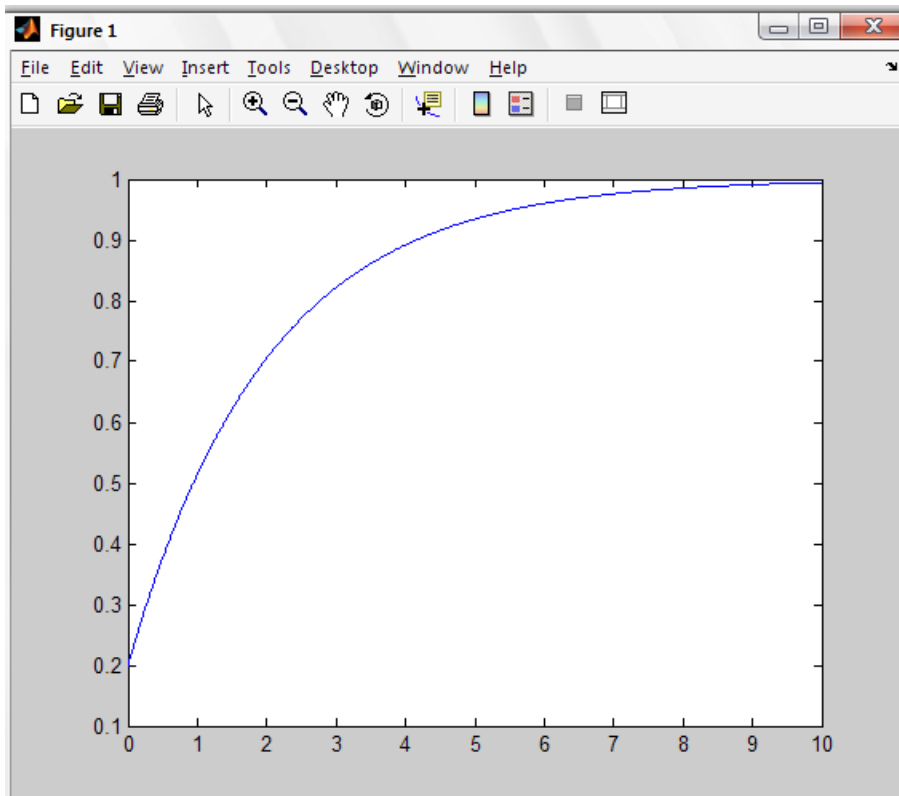


График функции распределения времени ожидания

Стационарный режим существует

Сколько вероятностей вычислять? 3

Вероятность простоя 0.2000

Вероятность состояний 1, ...K-1 0.1600 0.1280

Вероятность ожидания перед обслуживанием 0.8000

Вероятность обслуживания без ожидания 0.2000

Среднее число заявок в системе 4.0000

Среднее число заявок в очереди 3.2000

Среднее число занятых приборов 0.8000

Среднее время ожидания 1.6000

Среднее время пребывания в системе 2.0000

## Компьютерное моделирование основных процессов и статическая оценка характеристик СМО

```
lambda=2; mu=2.5; m=1;
Num=input('Число изменений состояний системы за время моделир.: ');
s=1;
T=zeros(1,Num);
Qt=zeros(1,Num);
Time = zeros(1,Num);
for i=2:Num,
    if Qt(i-1)==0
        v=Inf;u=-log(rand)/lambda;
    else
        u=-log(rand)/lambda;
        qs=min(m,Qt(i-1));
        v=-log(rand)/(qs*mu);
    end;
    delta_time=min(u,v);
    T(i)=T(i-1)+delta_time;
    Time(s)=Time(s)+delta_time;
```

```

if u<v
    Qt(i)=Qt(i-1)+1;
else
    Qt(i)=Qt(i-1)+1;
end;
s=Qt(i)+1;
end;
disp(' Оценки характеристик системы M|M|1 с ожиданием, ');
disp(' полученные на основе моделирования');
Psost=Time/T(Num);
disp('Вероятность простоя'); disp(Psost(1));
N=input('Кол-во вероятностей, которые необходимо вывести на экран:');
disp('Вероятности состояний 1,...,N'); disp(Psost(2:N));
disp('Вероятность ожидания');
Pw=1-sum(Psost(1:m)); disp(Pw);
disp('Среднее число заявок в системе');
k=0:(Num-1); Qsr=k*Psost'; disp(Qsr);
disp('Среднее число заявок в очереди');
qsr=max(0,k-m)*Psost'; disp(qsr);
z=zeros(1, Num);
mvect=ones(1, Num)*m;
qt=max(z, Qt-mvect);
subplot(211); plot(T, Qt);
subplot(212); plot(T, qt);

```

### Результаты полученные при моделировании основных процессов

Число изменений состояний системы за время моделирования: 5

Оценки характеристик системы M|M|1 с ожиданием,  
полученные на основе моделирования

Вероятность простоя 0.1446

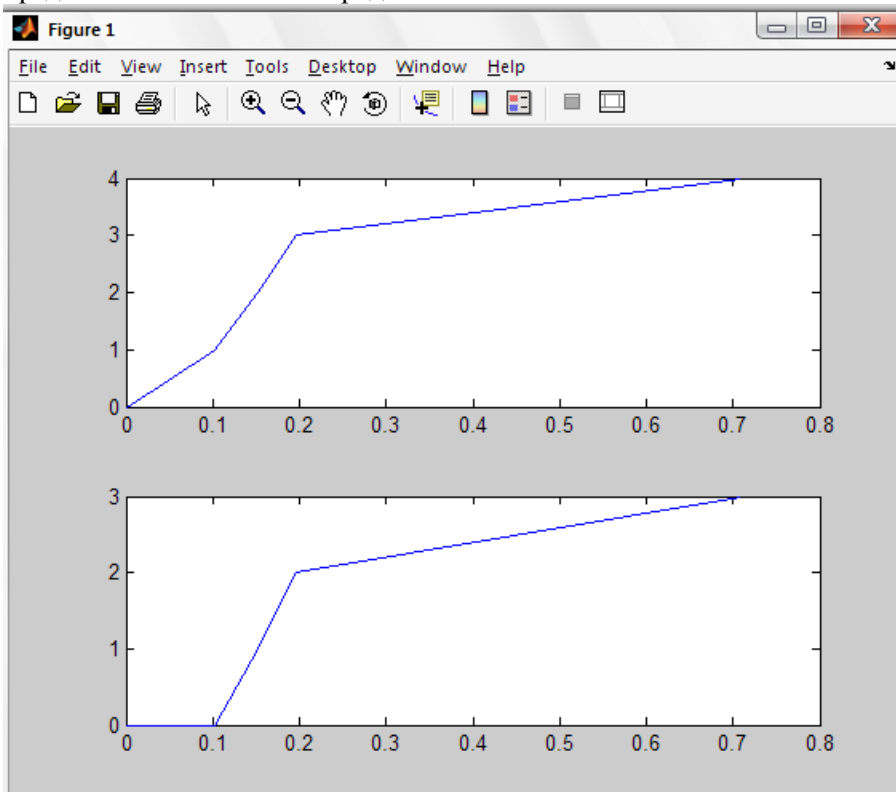
Количество вероятностей, которые необходимо вывести на экран: 1

Вероятности состояний 1,...,N

Вероятность ожидания 0.8554

Среднее число заявок в системе 2.3626

Среднее число заявок в очереди 1.5072



## *Вывод*

Проведен анализ работы Марковской СМО. Вычислены основные показатели эффективности работы СМО. Проводился как теоретический, так и статистический расчет, который был основан на моделировании. Результаты, полученные на основе расчётов и на основе моделирования, совпадают в пределах погрешностей, определяемых статистическим характером расчётов, что говорит о возможности практического применения для расчетов характеристик СМО этих двух способов.