8. ФОРМАЛИЗОВАННОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗНАНИЙ И РАССУЖДЕНИЙ

Способность человека и компьютера решать самые разнообразные задачи основывается на использовании знаний. Знания можно рассматривать как сведения, которые являются плодом учения, результатом накопления опыта. Судить – значит понимать, мыслить, делать выводы, доходить от данных к последствиям.

Рассуждение – это сам вывод (заключение).

Представление знаний компьютером связано с использованием формализованных языков. Примером такого языка может служить язык математической логики, который позволяет представлять знания и рассуждения в форме, близкой к естественному языку и к языку программирования.

Для моделирования процесса логического вывода используются логика высказываний и логика предикатов.

8.1. Логика высказываний

Логика высказываний – раздел логики, в котором вопрос об истинности или ложности решается на основе изучения способа построения одних высказываний из других (**не разделяемых** и **не анализируемых**) высказываний с помощью логических операций (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции).

Высказывание – это повествовательное предложение, которое может быть либо истинно *(true)*, либо ложно *(false)*, **но не то и другое вместе**.

Вопросительные, побудительные и запретительные предложения, а также фразы, выражающие эмоции и определения, высказываниями не являются.

Например,

Предложение *"Что день грядущий мне готовит?"* не является высказыванием, потому что является вопросительным предложением.

Предложение *"Сейчас кто-то стучит."* – высказывание (повествовательное предложение).

Высказывания могут быть *простыми* и *сложными*.

Простые высказывания **неразложимы**. Связкой в простых высказываниях бывает только ЕСТЬ или её отрицание НЕ ЕСТЬ.

Например,

Стул стоит на полу.
Стул не стоит на потолке.

Сложные высказывания получаются из простых с помощью логических связок отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации и эквиваленции.

Способ построения одних высказываний из других называют операцией.

Значение операции определяется по таблице истинности (табл. 22).

Таблица 22

Таблица истинности

Атомарные формулы		Отрицание	Дизъюнкция	Конъюнкция	Импликация	Эквиваленция
P	**Q**	**⌉P**	**P ∨ Q**	**P ∧ Q**	**P→ Q**	**P ↔ Q**
false	**false**	**true**	**false**	**false**	**true**	**true**
false	**true**	**true**	**true**	**false**	**true**	**false**
true	**false**	**false**	**true**	**false**	**false**	**false**
true	**true**	**false**	**true**	**true**	**true**	**true**

8.1.1. Формулы логики высказываний и их интерпретация

Высказывания обозначаются идентификаторами:

P: **Температура высокая.**
Q: **Влажность большая.**
R: **Будет дождь.**

Идентификаторы с индексами или без них, которые используются для обозначения высказываний, а также символы true и false *называются атомарными формулами* логики высказываний.

Пусть **X** и **Y** – некоторые высказывания, тогда:

- **⌉X** – отрицание высказывания **X**
- **X ∧ Y** – конъюнкция высказываний **X** и **Y**
- **X ∨ Y** – дизъюнкция высказываний **X** и **Y**
- **X → Y** – импликация высказываний **X** и **Y**
- **X ↔ Y** – эквиваленция высказываний **X** и **Y**

Символы ⌉ ∧ ∨ → ↔ называют *связками*.

В формуле импликации **X → Y**

X – первый операнд (посылка) называется *антецедент*.

Y – второй операнд (заключение) – *консеквент*.

Импликация удовлетворяет двум правилам:

1. Связка некоммутативная. *Если идёт дождь, то земля мокрая*. Это утверждение истинно. *Если земля мокрая, то идёт дождь*. Такое утверждение ложно, так как дождь идёт не потому, что земля мокрая.
2. Значение истинности зависит от двух операндов. Если антецедент истина, то значение истинности совпадает со значением консеквента. Если антецедент ложь, то импликация истинна: из ложного утверждения (имеется в виду **X**) следует всё что угодно (имеется в виду **Y**). Если консеквент *истина*, то импликация также *истинна*: истинное утверждение (имеется в виду **Y**) следует из чего угодно (имеется в виду **X**).

Правильно построенные при помощи логических связок составные высказывания называются формулами.

Интерпретировать формулу – значит приписать ей одно из двух значений истинности **true** или **false**.

Значение истинности формулы зависит от структуры этой формулы и от значения истинности составляющих её высказываний.

Формула, истинная при ***некоторой*** *интерпретации, называется выполнимой.*

Например, формула **A** → ⌉**A** выполнимая, она истинна при **A = false**.

Формула, ***истинная при всех возможных интерпретациях****, называется общезначимой (или тавтологией) и обозначается* ■.

Например, формула **A** ∨ ⌉**A** – тавтология.

Формула, ***ложная при всех возможных интерпретациях****, называется невыполнимой (или противоречием) и обозначается* □.

Например, формула **A** ∧ ⌉**A** – противоречие (утверждение и его отрицание не могут одновременно быть истинными).

<u>Теорема.</u> Пусть **A** – некоторая формула. Тогда:

если **A** – тавтология, то ⌉**A** – противоречие, и наоборот;

если **A** – противоречие, то ⌉**A** тавтология, и наоборот;

если **A** – тавтология, то неверно, что **A** – противоречие, но не наоборот;

если **A** – противоречие, то неверно, что **A** – тавтология, но не наоборот.

Доказательство. Очевидно из определений.

Теорема. Если формулы **A** и **A → B** – тавтология, то формула **B** – тавтология.

Доказательство. От противного.

Пусть **I (B) = false**. Но **I (A) = true**, так как **A** – тавтология.

Значит **I (A → B) = false**, что противоречит предположению о том, что **A → B** – тавтология.

8.1.2. Законы логики высказываний

Пусть **P**, **Q** и **R** – некоторые формулы логики высказываний.

Тогда следующие формулы равносильны:

1)	$P \wedge 1$	и	P
2)	$P \vee 1$	и	1
3)	$P \wedge 0$	и	0
4)	$P \vee 0$	и	P

Законы идемпотентности:

5)	$P \wedge P$	и	P
6)	$P \vee P$	и	P

Законы коммутативности:

7)	$P \wedge Q$	и	$Q \wedge P$
8)	$P \vee Q$	и	$Q \vee P$

Законы ассоциативности:

9)	$P \wedge (Q \wedge R)$	и	$(P \wedge Q) \wedge R$
10)	$P \vee (Q \vee R)$	и	$(P \vee Q) \vee R$

Закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции:

11)	$P \wedge (Q \vee R)$	и	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции:

12)	$P \vee (Q \wedge R)$	и	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Законы поглощения:

13)	$P \wedge (P \vee Q)$	и	P
14)	$P \vee (P \wedge Q)$	и	P

Закон противоречия:

15)	$P \wedge \urcorner P$	и	0

Закон поглощения третьего:

16) $P \vee \neg P$ и 1

Законы де Моргана:

17) $\neg(P \wedge Q)$ и $\neg P \vee \neg Q$

18) $\neg(P \vee Q)$ и $\neg P \wedge \neg Q$

Закон двойного отрицания:

19) $\neg\neg P$ и P

Теоремы:

20) $P \to Q$ и $\neg P \vee Q$

21) $P \leftrightarrow Q$ и $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

8.1.3. Тождественно истинная формула

Формула **F** называется тождественно истинной, если для любой интерпретации **I** выполняется равенство **I (F) = true**.

Формула $F = X \wedge Y \to X$ тождественно истинна. Доказывается путём построения таблицы истинности, как показано в табл. 23.

Таблица 23

Таблица истинности для доказательства $F = X \wedge Y \to X$

X	Y	$X \wedge Y$	$F = X \wedge Y \to X$
false	false	false	true
false	true	false	true
true	false	false	true
true	true	true	true

8.1.4. Равносильность

<u>Теорема.</u> Формулы **F** и **G** равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тождественно истинной.

Доказательство:

а) Допустим, что формулы **F** и **G** равносильны.

Рассмотрим интерпретацию **I**.

Ясно, что $I(F \leftrightarrow G) = I(F) \leftrightarrow I(G)$.

Так как значения истинности **I (F)** и **I (G)** совпадают,

то по таблице истинности эквиваленции имеем $I(F) \leftrightarrow I(G) = 1$.

Это значит, что формула $F \leftrightarrow G$ тождественно истинна.

b) Пусть теперь формула $\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{G}$ тождественно истинна.

Рассмотрим интерпретацию $\mathbf{I}$.

Имеем, что $\mathbf{1 = I\,(F \leftrightarrow G) = I\,(F) \leftrightarrow I\,(G)}$.

Но из таблицы истинности эквиваленции следует, что

если $\mathbf{I\,(F) \leftrightarrow I\,(G) = 1}$, то $\mathbf{I\,(F) = I\,(G)}$.

Что и требовалось доказать.

Формулы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ *равносильны*, если для любой интерпретации $\mathbf{I}$ выполняется равенство $\mathbf{I\,(F) = I\,(G)}$.

<u>Теорема.</u> Формулы $\mathbf{F = X \to Y}$ и $\mathbf{G = \rceil X \vee Y}$ равносильны.

Если интерпретации $\mathbf{I_1}$ и $\mathbf{I_2}$ совпадают на $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$,

то $\mathbf{I_1\,(F) = I_2\,(F)}$ и $\mathbf{I_1\,(G) = I_2\,(G)}$.

Значит, для проверки $\mathbf{I_1\,(F) = I_1\,(G)}$ из определения равносильности надо рассмотреть лишь интерпретации, которые различаются на $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, и вычислить значения $\mathbf{I_1\,(F)}$ и $\mathbf{I_1\,(G)}$.

Доказывается путём построения таблицы истинности.

8.1.5. Логическое следствие

Пусть даны формулы $\mathbf{F_1, F_2,\ldots F_n}$ и формула $\mathbf{G}$.

Говорят, что $\mathbf{G}$ является логическим следствием формул $\mathbf{F_1, F_2,\ldots F_n}$,

если и только если *для всякой интерпретации* $\mathbf{I}$,

в которой формулы $\mathbf{F_1, F_2,\ldots F_n}$ истинны, формула $\mathbf{G}$ также истинна.

8.1.6. Теорема о дедукции

Пусть даны формулы $\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_n}$ и формула $\mathbf{G}$. Тогда формула $\mathbf{G}$ является логическим следствием формул $\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_n}$, если и только если формула вида $\mathbf{(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \to G)}$ является *общезначимой и наоборот*.

Доказательство:

a) Предположим, что $\mathbf{G}$ является логическим следствием формул $\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_n}$.

   Пусть $\mathbf{I}$ – произвольная интерпретация для $\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_n}$. Если все $\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_n}$ истинны в $\mathbf{I}$, то по определению логического следствия $\mathbf{G}$ тоже истинна в $\mathbf{I}$.

   Тогда формула $\mathbf{(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \to G)}$ истинна в $\mathbf{I}$ по определению операции импликации (true → true = true).

С другой стороны, если не все $F_1, F_2, \ldots, F_n$ истинны в **I**, то есть хотя бы одна из них ложна в **I**, тогда формула $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \rightarrow G)$ истинна в **I** по определению операции импликации (false $\rightarrow$ false = true или false $\rightarrow$ true = true).

Таким образом, формула $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \rightarrow G)$ истинна для всякой интерпретации, то есть она является общезначимой.

b) Пусть $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \rightarrow G)$ – общезначимая формула.

Тогда для всякой интерпретации **I**, если формула $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n)$ истинна в **I**, то **G** должна быть истинна в **I** по определению операции импликации. То есть формула **G** является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, что и требовалось доказать.

8.1.7. Логическое следствие и выводимость

Теорема. Формула **G** является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, если и только если формула вида $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \rightarrow \urcorner G)$ *противоречива*.

Доказательство: По теореме о дедукции **G** является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, если и только если формула $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \rightarrow G)$ общезначима, то есть её отрицание противоречиво:

$$\urcorner(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \rightarrow G) \quad \leftrightarrow$$

$$\urcorner(\urcorner(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n) \vee G) \quad \leftrightarrow$$

$$\urcorner(\urcorner(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n)) \wedge \urcorner G \quad \leftrightarrow$$

$$F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \wedge \urcorner G$$

Что и требовалось доказать.

Если существует правило вывода **R**, то говорят, что **G** непосредственно выводима из формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$ по правилу вывода **R**. Обычно этот факт записывают следующим образом:

$$\frac{F1, F2, \ldots, Fn}{G} R$$

Если формула **G** является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, то формула вида $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \rightarrow G)$ называется теоремой, формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – посылками теоремы, **G** – заключением теоремы.

Таким образом, процесс решения задач, требующих логических рассуждений, может быть сведён к процедуре доказательства теорем. При этом достаточно доказать либо общезначимость некоторой формулы, либо **противоречивость отрицания этой формулы**.