8.2. Логика предикатов

Не всякие высказывания и не любые рассуждения могут быть описаны на языке логики высказываний.

Логика предикатов – раздел логики, в котором изучаются **общезначимые связи** между высказываниями о свойствах и отношениях объектов.

Понятие *предикат* обобщает понятие *высказывание*. Неформально говоря, предикат – это высказывание, в которое можно подставлять аргументы. Если аргумент один, то предикат выражает свойство аргумента. Если аргументов больше одного, то – отношение между аргументами.

Например, известны высказывания:

Сократ – человек
Платон – человек

Оба эти высказывания выражают свойство *быть человеком*.

Таким образом, можно рассматривать предикат *быть человеком* и говорить, что он выполняется для *Сократа* и *Платона*.

Разница между понятиями *отношение* и *предикат* состоит в следующем. Предикат – индикатор отношения. Он может принимать значение *истина* или *ложь* в зависимости от того, имеет место или нет конкретное отношение для указанных аргументов.

Предикат в логике предикатов определяется следующим образом:

Пусть **M** – непустое множество. Тогда заданным на **M** **n**-арным предикатом называется выражение, которое содержит **n** переменных $\mathbf{x_i}$ и обращается в высказывание при замене этих переменных элементами множества. Множество **M** называют *предметной областью,* $\mathbf{x_i}$ – *предметными переменными*.

8.2.1. Кванторы

Наличие переменных в логике предикатов позволяет анализировать внутреннюю структуру утверждений.

Требуется иметь возможность утверждать, что *любые* или *какие-то* объекты обладают определёнными свойствами или находятся в определённых отношениях.

Пусть $\mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)}$ – предикат, определённый на области **M**.

Значение истинности предиката зависит от значений свободных переменных и не зависит от значений связанных переменных.

Если переменные $\mathbf{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n}$ свободны, то при связывании переменных предикат $\mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)}$ может получить значение *истина* в двух случаях:

1. Для всех $\mathbf{x_i} \in \mathbf{M}$ вычисление формулы $\mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$ даёт значение *истина* – $\forall \mathbf{x_i}\ \mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$.
2. Существует $\mathbf{x_i} \in \mathbf{M}$ такое, что вычисление формулы $\mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$ даёт значение *истина* – $\exists \mathbf{x_i}\ \mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$.

В первом случае говорят о *кванторе всеобщности*, во втором – о *кванторе существования*.

Кванторы имеют одинаковый приоритет, который выше приоритета всех остальных связок.

Можно было бы не вводить квантор существования, так как

$\exists \mathbf{x_i}\ \mathbf{P\ (x)}$ то же самое, что и $\rceil(\forall \mathbf{x_i} \rceil \mathbf{P\ (x)})$
$\rceil(\forall \mathbf{x_i}\ \mathbf{P\ (x)})$ то же самое, что и $\exists \mathbf{x_i} \rceil \mathbf{P\ (x)}$

Перестановка кванторов всеобщности и существования может изменить смысл и значение выражения.

Например,

Задан предикат **мать (x, y)**, который означает, что ***x*** *является мамой для* ***y***. Тогда:

$\forall$**y** $\exists$**x мать (x, y)**

означает, что *у каждого человека* ***y*** *существует мама* ***x***. Это выражение истинно.

$\exists$**x** $\forall$**y мать (x, y)**

означает, что *существует мать всех людей*. Истинность этого выражения зависит от множества значений, которые может принимать **y**. Если это множество братьев и сестёр, тогда выражение истинно, иначе – ложно.

Переход от $\mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$ к $\forall \mathbf{x_i}\ \mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$ или к $\exists \mathbf{x_i}\ \mathbf{P\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$ называют *навешиванием квантора* на переменную $\mathbf{x_i}$, или *связыванием* переменной $\mathbf{x_i}$. Выражение, на которое навешен квантор, называется *областью действия квантора*.

Переменная, на которую навешен квантор, называется связанной.

Вхождение переменной в формулу называется *связанным*, если переменная стоит непосредственно за квантором или входит в область действия квантора по этой переменной. Иначе – вхождение называется *свободным*.

Переменная называется свободной в формуле, если существует хотя бы одно свободное вхождение переменной в эту формулу.

Формула, не содержащая свободных вхождений, называется *замкнутой*.

Одна и та же переменная может иметь в формуле как свободные, так и связанные вхождения.

Например, пусть имеется формула $\forall$ **x (P (x) $\rightarrow \exists$ y Q (x , y))**

В подформулу $\exists$ **y Q (x, y)** переменная **x** входит свободно, а вхождения переменной **y** связаны квантором существования. Таким образом, эта подформула *не замкнута*. С другой стороны, то же самое вхождение переменной **x** в формулу является связанным квантором всеобщности $\forall$ **x**. Поэтому вся формула *замкнута*.

В формуле **F = P(x) $\wedge \forall$ y [U(x, y) $\rightarrow \exists$ x (W (x, y) $\vee$ P(y))]**

Первое и второе вхождения переменной **x** свободны, третье и четвёртое – связаны. Все вхождения переменной **y** связаны.

Если формула содержит свободные переменные, то есть не связанные кванторами всеобщности или существования, то вычислить логическое значение такой формулы нельзя.

Выражение, не имеющее свободных переменных, является высказыванием.

Высказывание – предикат, в котором нет переменных для замены.

8.2.2. Символы языка логики предикатов

Логические связки: $\rceil$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$

Кванторы: $\forall$ $\exists$

Предметные переменные: обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита **u, v, w, x, y, z,** $\mathbf{x_1}$**, …**.

Предметные константы: обычно обозначаются первыми буквами латинского алфавита **a, b, c, d,** $\mathbf{a_1}$**, …**.

Функциональные символы: обозначаются как **f,** $\mathbf{f_1}$**,** $\mathbf{f_2}$**, …**, могут использоваться также обозначения известных математических функций и операций (**sin**, **cos**, **ln** и т.д.).

Предикатные символы: обычно обозначаются прописными символами **P, R,** $\mathbf{P_1}$**, …**.

Каждый функциональный и предикатный символ может иметь определённую арность, которая указывается в виде верхнего индекса $\mathbf{f^{(1)}}$, $\mathbf{P^{(3)}}$.

Термы – это или предикатные константы, или предикатные переменные, или выражения вида $\mathbf{f^{(n)}\ (t_1, \ldots, t_n)}$,

, где $\mathbf{f^{(n)}}$ – **n**-арный функциональный символ;

$\mathbf{t_1, \ldots, t_n}$ – термы.

Можно сказать, что терм – выражение, полученное из переменных и констант с помощью функциональных символов.

8.2.3. Формулы логики предикатов и их интерпретация

Атомарные формулы – это выражения вида $\mathbf{P}\ (\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n})$,

, где $\mathbf{P}$ – $\mathbf{n}$-арный предикатный символ;
$\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}$ – термы.

Формулами логики предикатов являются либо атомарные формулы, либо выражения вида:

$$\urcorner \mathbf{F} \quad | \quad \mathbf{F_1} \wedge \mathbf{F_2} \quad | \quad \mathbf{F_1} \vee \mathbf{F_2} \quad | \quad \mathbf{F_1} \to \mathbf{F_2} \quad | \quad \mathbf{F_1} \leftrightarrow \mathbf{F_2} \quad | \quad \forall\, \mathbf{x_i}\, \mathbf{F} \quad | \quad \exists\, \mathbf{x_i}\, \mathbf{F}$$

, где $\mathbf{F}, \mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}$ – формулы, $\mathbf{x_i}$ – предметная переменная.

Предикат $\mathbf{W}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ называется конъюнкцией
предикатов $\mathbf{U}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$, заданных на множестве $\mathbf{M}$,
если для любых $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$ из $\mathbf{M}$
высказывание $\mathbf{W}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})$
есть конъюнкция высказываний $\mathbf{U}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})$.

Истинность или ложность формул логики предикатов может быть проверена путём их интерпретации.

Для того чтобы определить интерпретацию, необходимо задать:

– *множество значений*, которые могут принимать переменные;
– *операции*, приписываемые функциональным символам;
– *отношения* для предикатных символов.

В результате любая формула $\mathbf{F}$ получает в соответствие предикат, арность которого равна числу свободных переменных формулы $\mathbf{F}$.

Интерпретацией на непустом множестве $\mathbf{M}$ называется функция, заданная объединением множеств символов функций и предикатов $\mathbf{F} \cup \mathbf{P}$, которая:

1. константе ставит в соответствие элемент из $\mathbf{M}$;
2. символу $\mathbf{n}$-арной функции ставит в соответствие некоторую $\mathbf{n}$-арную функцию, определенную на множестве $\mathbf{M}$;
3. символу $\mathbf{n}$-арного предиката ставит в соответствие $\mathbf{n}$-арный предикат, заданный на $\mathbf{M}$.

Интерпретация формулы предикатов определяет множество объектов, называемых *областью интерпретации*.

Пример 8-1. Интерпретация формулы в логике предикатов.

Заданы предложения:

Все студенты нашей кафедры – члены клуба ИВС.
А некоторые члены клуба ИВС занимаются спортом.
Следовательно, некоторые студенты нашей кафедры занимаются спортом.

Описание предикатов:

Student (x) – ***x*** *студент нашей кафедры*
Member (x) – ***x*** *член клуба ИВС*
Sportsman (x) – ***x*** *занимается спортом*

Последовательность формул:

$$\mathbf{F_1 = \forall\, x\, (Student\, (x) \rightarrow Member\, (x))}$$
$$\mathbf{F_2 = \exists\, x\, (Member\, (x) \wedge Sportsman\, (x))}$$
$$\mathbf{G = \exists\, x\, (Student\, (x) \wedge Sportsman\, (x))}$$

Рассмотрим множество **M = {иван, олег, пётр}** и интерпретацию **I**:

(I Student) (x) **x = иван**
(I Member) (x) **x = иван или x = олег**
(I Sportsman) (x) **x = олег**

Легко видеть, что $\mathbf{I\,(F_1) = I\,(F_2) = 1}$ и $\mathbf{I\,(G) = 0}$.

8.2.4. Законы логики предикатов

Справедливы все законы логики высказываний (раздел 8.1.2), где под формулами понимаются произвольные формулы логики предикатов.

Существуют так же специфичные для логики предикатов законы.

Пусть **F**, **G**, **H** – произвольные формулы логики предикатов.

Тогда следующие формулы равносильны.

Квантор всеобщности можно переносить через конъюнкцию:

1) $\forall\, x\, (F\,(x) \wedge G\,(x))$ и $\forall\, x\, F\,(x) \wedge \forall\, x\, G\,(x)$

Квантор существования можно переносить через дизъюнкцию:

2) $\exists\, x\, (F\,(x) \vee G\,(x))$ и $\exists\, x\, F\,(x) \vee \exists\, x\, G\,(x)$

Одноимённые кванторы можно менять местами:

3) $\forall\, x\, \forall\, y\, F\,(x, y)$ и $\forall\, y\, \forall\, x\, F\,(x, y)$
4) $\exists\, x\, \exists\, y\, F\,(x, y)$ и $\exists\, y\, \exists\, x\, F\,(x, y)$

Отрицание квантора можно переносить:

5) $\rceil \forall\, x\;\; F\,(x)$ и $\exists\, x \rceil F\,(x)$
6) $\rceil \exists\, x\;\; F\,(x)$ и $\forall\, x \rceil F\,(x)$

8.2.5. Тождественно истинная формула

Формула $\mathbf{F(x_1, \ldots, x_n)}$ называется тождественно истинной, если для любой интерпретации **I** с областью **M** высказывание $\mathbf{(I\ F)\ (a_1, \ldots, a_n)}$ при любых $\mathbf{a_1, \ldots, a_n}$ из **M** является истинным.

8.2.6. Равносильность

Формулы $\mathbf{F\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)}$ и $\mathbf{G\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)}$ называются *равносильными*,
если для любой интерпретации $\mathbf{I}$ с областью $\mathbf{M}$
высказывания $\mathbf{(I\ F)(a_1,\ \ldots,\ a_n)}$ и $\mathbf{(I\ G)(a_1,\ \ldots,\ a_n)}$
при любых $\mathbf{a_1,\ \ldots,\ a_n}$ из $\mathbf{M}$
одновременно истинны или одновременно ложны.

Например,

Пусть даны формулы $\mathbf{F\ (x) = \rceil \forall\ y\ P\ (x,\ y)}$ и $\mathbf{G\ (x) = \exists\ y \rceil P\ (x\ ,\ y)}$, где $\mathbf{P}$ – символ двухместного предиката.

Докажем, что формулы $\mathbf{F\ (x)}$ и $\mathbf{G\ (x)}$ равносильны.

Возьмём интерпретацию $\mathbf{I}$ с областью $\mathbf{M}$.

Пусть высказывание $\mathbf{(I\ F)\ (a)}$ истинно для $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$.

Истинность этого высказывания означает, что не для всякого $\mathbf{y} \in \mathbf{M}$ высказывание $\mathbf{(I\ P)\ (a,\ y)}$ истинно. Следовательно, найдётся $\mathbf{b} \in \mathbf{M}$, для которого высказывание $\mathbf{(I\ P)\ (a,\ b)}$ ложно.

Если высказывание $\mathbf{(I\ P)\ (a,\ b)}$ ложно, то высказывание $\rceil\mathbf{(I\ P)\ (a,\ b)}$ истинно.

Отсюда следует, что найдётся $\mathbf{y} \in \mathbf{M}$ такой, для которого высказывание $\rceil\mathbf{(I\ P)\ (a,\ y)}$ истинно, что означает истинность высказывания $\mathbf{(I\ G)\ (a)}$.

Итак, доказано, что если высказывание $\mathbf{(I\ F)\ (a)}$ истинно, то высказывание $\mathbf{(I\ G)\ (a)}$ тоже истинно.

Обратная импликация доказывается аналогично.

Значения истинности высказываний $\mathbf{(I\ F)\ (a)}$ и $\mathbf{(I\ G)\ (a)}$ при любом $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$ совпадают. Следовательно, формулы $\mathbf{F(x)}$ и $\mathbf{G(x)}$ равносильны.

Понятия равносильности и тождественной истинности в логике предикатов связаны точно так же, как и в логике высказываний.

<u>Теорема.</u> Формулы $\mathbf{F\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)}$ и $\mathbf{G\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)}$ равносильны тогда и только тогда, когда формула $\mathbf{F\ (x_1,\ \ldots,\ x_n) \leftrightarrow G\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)}$ тождественно истинна.

8.2.7. Логическое следствие и выводимость

Формула $\mathbf{G\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)}$ называется *логическим следствием*
формул $\mathbf{F_1\ (x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ F_k\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)}$,
если *для любой интерпретации* $\mathbf{I}$ с областью $\mathbf{M}$ и любых $\mathbf{a_1,\ldots,a_n} \in \mathbf{M}$
из истинности высказываний $\mathbf{(I\ F_1)\ (a_1,\ \ldots,\ a_n),\ \ldots,\ (I\ F_k)\ (a_1,\ldots,\ a_n)}$
следует истинность высказывания $\mathbf{(I\ G)\ (a_1,\ \ldots,\ a_n)}$.

Теорема. Формула $\mathbf{G\ (x_1, \ldots, x_n)}$ является логическим следствием формул $\mathbf{F_1\ (x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k\ (x_1, \ldots, x_n)}$ тогда и только тогда, когда множество формул $\mathbf{\{F_1\ (x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k\ (x_1, \ldots, x_n), \rceil G\ (x_1, \ldots, x_n)\}}$ *невыполнимо*.

Множество формул $\mathbf{S = \{F_1\ (x_1,\ldots,x_n), \ldots, F_k\ (x_1,\ldots,x_n)\}}$

называется *выполнимым*, если существует интерпретация $\mathbf{I}$ с областью $\mathbf{M}$

и элементы $\mathbf{a_1, \ldots, a_l} \in \mathbf{M}$ такие, что *все высказывания*

$\mathbf{(I\ F_1)\ (a_1, \ldots, a_n), \ldots, (I\ F_k)\ (a_1, \ldots, a_n)}$ *истинны*.

Каждое вхождение переменной в формуле находится в области действия квантора по этой переменной.

Предложение в логической программе рассматривается как формула.

В логике предикатов первого порядка:

- *термы* представляют объекты предметной области и могут содержать как конкретные имена – константы, так и обобщённые имена – переменные;
- *предикаты* выражают отношения между объектами предметной области (обозначенными с помощью термов) или свойства объектов;
- *предложения* описывают логические свойства отношений.

Формулы логики предикатов состоят не только из подформул, но также из термов, содержащих переменные. Для доказательства истинности формулы необходимо найти такие значения переменных, при которых формула является истинной.

8.3. Метод резолюций

Литералом называется атомарная формула *(кроме 1 и 0)* или её отрицание.

Дизъюнктом называется литерал или дизъюнкция литералов.

Примеры дизъюнктов: $\mathbf{X} \quad \rceil\mathbf{X} \quad \mathbf{Y} \quad \mathbf{X} \vee \rceil\mathbf{Y} \quad \Box$

$\Box$ – *невыполнимый* (пустой) *дизъюнкт* ложен при любой интерпретации.

Резолюция – это правило вывода, используемое для вывода новой логической формулы из двух посылок.

Чтобы применить резолюцию, формула должна находиться в конъюнктивной нормальной форме (КНФ).

8.3.1. КНФ в логике высказываний

Формула $\mathbf{G}$ имеет конъюнктивную нормальную форму, если она является *дизъюнктом или конъюнкцией дизъюнктов*.

Теорема. Для всякой формулы **F** существует формула **G**, равносильная **F** и имеющая конъюнктивную нормальную форму.

Алгоритм приведения к КНФ

Шаг 1. Используя законы 21 и 20 логики высказываний исключить из исходной формулы эквиваленцию и импликацию.

Шаг 2. С помощью законов 17 – 19 логики высказываний занести отрицание к атомарным формулам.

Шаг 3. Необходимое число раз применить правила преобразования, выведенные из законов 11 – 12 , заменив подформулы

$$\mathbf{H_1 \lor (H_2 \land H_3)} \quad \text{на} \quad \mathbf{(H_1 \lor H_2) \land (H_1 \lor H_3)}$$
$$\mathbf{(H_1 \land H_2) \lor H_3} \quad \text{на} \quad \mathbf{(H_1 \lor H_3) \land (H_2 \lor H_3)}$$

Пример 8-2. Приведение к КНФ в логике высказываний.

Найти КНФ для формулы $\mathbf{F = (X \lor Y) \to X \land Y}$

Шаг 1. Согласно закону (20) $\mathbf{P \to Q \leftrightarrow \neg P \lor Q}$
получается формула $\mathbf{F_1 = [\neg (X \lor Y)] \lor X \land Y}$

Шаг 2. Согласно закону (18) $\mathbf{\neg (P \lor Q) \leftrightarrow \neg P \land \neg Q}$
получается формула $\mathbf{F_2 = (\neg X \land \neg Y) \lor X \land Y}$

Шаг 3. Согласно закону (12) $\mathbf{P \lor (Q \land R) \leftrightarrow (P \lor Q) \land (P \lor R)}$
получаются формулы $\mathbf{F_3 = [(\neg X \land \neg Y) \lor X] \land [(\neg X \land \neg Y) \lor Y]}$

$$\mathbf{F_4 = (X \lor \neg X) \land (X \lor \neg Y) \land (\neg X \lor Y) \land (\neg Y \lor Y)}$$

Наконец, согласно закону (16) $\mathbf{P \lor \neg P \leftrightarrow 1}$ получается формула в КНФ:

$$\mathbf{F_5 = (X \lor \neg Y) \land (\neg X \lor Y)}$$

8.3.2. КНФ в логике предикатов

Говорят, что формула **G** находится в КНФ, если она представляет собой *конъюнкцию* ***конечного*** *числа дизъюнктов*.

Теорема. Для любой бескванторной формулы существует формула, логически эквивалентная исходной и находящаяся в КНФ.

Если задана интерпретация на области **M** некоторой формулы **F** логики предикатов, то можно вычислить значение этой формулы по алгоритму.

Алгоритм приведения к КНФ

Шаг 1. Исходная формула приводится к предваренной нормальной форме:

1. Исключаются эквиваленция и импликация.

$$\mathbf{A \leftrightarrow B} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{(A \to B) \land (B \to A)}$$
$$\mathbf{A \to B} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{\neg A \lor B}$$

2. Все отрицания переносятся внутрь формулы, чтобы они стояли только перед атомарными формулами.

$$\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$$
$$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$$
$$\neg(\exists\, \mathbf{x}\, \mathbf{A}) \leftrightarrow \forall\, \mathbf{x} \neg\mathbf{A}$$
$$\neg(\forall\, \mathbf{x}\, \mathbf{A}) \leftrightarrow \exists\, \mathbf{x} \neg\mathbf{A}$$
$$\neg\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$$

3. Переименовываются связанные переменные так, чтобы ни одна переменная не входила в формулу одновременно связанно и свободно.

4. Кванторы выносятся в начало формулы.

$$\mathbf{Q\,x\,A\,(x) \vee B} \leftrightarrow \mathbf{Q\,x\,(A\,(x) \vee B)}$$
, *если* $\boldsymbol{B}$ *не содержит переменной* $\boldsymbol{x}$, *а* $\boldsymbol{Q} \in \{\forall, \exists\}$

$$\mathbf{Q\,x\,A\,(x) \wedge B} \leftrightarrow \mathbf{Q\,x\,(A\,(x) \wedge B)}$$
, *если* $\boldsymbol{B}$ *не содержит переменной* $\boldsymbol{x}$, *а* $\boldsymbol{Q} \in \{\forall, \exists\}$

$$\forall\, \mathbf{x\,A\,(x)} \wedge \forall\, \mathbf{x\,B\,(x)} \leftrightarrow \forall\, \mathbf{x\,(A\,(x) \wedge B\,(x))}$$
$$\exists\, \mathbf{x\,A\,(x)} \vee \exists\, \mathbf{x\,B\,(x)} \leftrightarrow \exists\, \mathbf{x\,(A\,(x) \vee B\,(x))}$$
$$\mathbf{Q_1\,x\,A\,(x) \vee Q_2\,x\,B\,(y)} \leftrightarrow \mathbf{Q_1\,x\,Q_2\,y\,(A\,(x) \vee B\,(y))}$$
, *где* $\boldsymbol{Q_i} \in \{\forall, \exists\}$

$$\mathbf{Q_1\,x\,A\,(x) \wedge Q_2\,x\,B\,(y)} \leftrightarrow \mathbf{Q_1\,x\,Q_2\,y\,(A\,(x) \wedge B\,(y))}$$
, *где* $\boldsymbol{Q_i} \in \{\forall, \exists\}$

Шаг 2. Проводится *сколемизация*, то есть в формуле исключаются кванторы существования. Для каждого квантора существования выполняется алгоритм (который придумал *Сколем* в 1927 году):

> Если устраняемый квантор ∃ – *самый левый* в префиксе формулы, *заменяются* все вхождения в формулу связанной этим квантором переменной *на новую константу*, и квантор ∃ вычёркивается.
>
> Если левее устраняемого квантора ∃ имеются кванторы ∀, *заменяются* все вхождения в формулу связанной этим квантором ∃ переменной *на новый функциональный символ* от переменных, которые связаны левее стоящими кванторами ∀, и вычёркивается квантор существования.

Проведя этот процесс для всех кванторов существования, получается формула, находящаяся *в сколемовской нормальной форме (СНФ)*.

<u>Теорема.</u> Формула и её сколемизация эквивалентны в смысле выполнимости.

Шаг 3. Исключаются кванторы всеобщности. Полученная формула будет бескванторной и эквивалентной исходной в смысле выполнимости.

Шаг 4. Формула приводится к КНФ, для чего используются эквивалентности, выражающие дистрибутивность:

$$\mathbf{A \vee (B \wedge C) \quad \leftrightarrow \quad (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$
$$\mathbf{A \wedge (B \vee C) \quad \leftrightarrow \quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$

Шаг 5. Исключаются конъюнкции, представляя формулу в виде множества дизъюнктов. Получается множество дизъюнктов, эквивалентное исходной формуле в том смысле, который даёт следующая теорема:

Теорема. Формула является тождественно ложной тогда и только тогда, когда множество дизъюнктов, полученных из неё, является невыполнимым.

Множество формул называется невыполнимым, если не существует такого означивания переменных, чтобы все формулы из этого множества были бы истинными.

Пример 8-3. Преобразование формулы во множество дизъюнктов.

Найти множество дизъюнктов для формулы

$$\forall\, \mathbf{x\ (P\ (x) \rightarrow \exists\ y\ (P\ (y) \vee \rceil Q\ (x, y)))}$$

Шаг 1. Предваренная нормальная форма (исключается импликация):

$$\forall\, \mathbf{x\ (\rceil P\ (x) \vee \exists\ y\ (P\ (y) \vee \rceil Q\ (x, y)))}$$

Переменная **y** выносится за скобки (это возможно, потому что подформула $\rceil\mathbf{P\ (x)}$ не зависит от переменной **y**):

$$\forall\, \mathbf{x\ \exists\ y\ (\rceil P\ (x) \vee (P\ (y) \vee \rceil Q\ (x, y)))}$$

Если бы подформула зависела от переменной **y**, можно было бы переименовать связанную переменную **y**. Например,

$$\exists\, \mathbf{x\ \forall\ y\ \forall\ z\ \exists\ u\ \forall\ v\ \exists\ w\ (P\ (x, y, z, u, v, w))}$$
$$\forall\, \mathbf{y\ \forall\ z\ \forall\ v\ (P\ (a, y, z, f\ (\ y, z\ ), v, g\ (y, z, v)))}$$

Шаг 2. Левее квантора существования стоит квантор ∀. Нужно заменить все вхождения переменной **y** новым унарным функциональным символом, зависящим от **x**. Получается СНФ:

$$\forall\, \mathbf{x\ (\rceil P\ (x) \vee (P\ (f\ (x) \vee \rceil Q\ (x, f\ (x))))}$$

Шаг 3. Исключается квантор всеобщности:

$$\mathbf{\rceil P\ (x) \vee (P\ (f\ (x) \vee \rceil Q\ (x, f\ (x)))}$$

В шагах 4 и 5 необходимости нет, так как формула уже дизъюнкт:

$$\mathbf{\rceil P\ (x) \vee P\ (f\ (x) \vee \rceil Q\ (x, f\ (x))}$$

8.3.3. Правило резолюции в логике высказываний

Если для двух дизъюнктов существует атомарная формула, которая в один дизъюнкт входит положительно, а в другой отрицательно, то, вычеркнув соответственно из одного дизъюнкта положительное вхождение атомарной формулы, а из другого – отрицательное, и объединив эти дизъюнкты, получается дизъюнкт, называемый резольвентой.

Исходные дизъюнкты называются родительскими или *резольвируемыми*, а вычеркнутые формулы – *контрарными литералами*.

Резольвента – это дизъюнкт, полученный из объединения родительских дизъюнктов вычеркиванием контрарных литералов:

Из дизъюнктов $\mathbf{X} \vee \mathbf{F}$ *и* $\rceil\mathbf{X} \vee \mathbf{G}$ *выводИм дизъюнкт* $\mathbf{F} \vee \mathbf{G}$

, где $\mathbf{X} \vee \mathbf{F}$ и $\rceil\mathbf{X} \vee \mathbf{G}$ – родительские дизъюнкты,
$\mathbf{X}$ и $\rceil\mathbf{X}$ – контрарные литералы,
$\mathbf{F} \vee \mathbf{G}$ – резольвента.

Правило резолюций сохраняет истинность:

если $\mathbf{I}\ (\mathbf{X} \vee \mathbf{F}) = \mathbf{1}$ и $\mathbf{I}\ (\rceil\mathbf{X} \vee \mathbf{G}) = \mathbf{1}$ для некоторой интерпретации $\mathbf{I}$,

то $\mathbf{I}\ (\mathbf{F} \vee \mathbf{G}) = \mathbf{1}$.

Если родительские дизъюнкты представляют только контрарные литералы, то резольвентой является пустой дизъюнкт: $\mathbf{A} \vee \rceil\mathbf{A} = \square$

Правило вывода **modus ponens** получается из правила резолюции:

Первый родительский дизъюнкт: $\mathbf{C_1} = \mathbf{A}$

Второй родительский дизъюнкт: $\mathbf{C_2} = \rceil\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ (эквивалентно $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$)

Контрарные литералы: $\mathbf{A}$ и $\rceil\mathbf{A}$

Резольвента: $\mathbf{R} = \mathbf{B}$