8.3.4. Правила резолюции и склейки в логике предикатов

Правило резолюции:

Из дизъюнктов $\rceil \mathbf{P}\ (\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}) \vee \mathbf{F}$ и $\mathbf{P}\ (\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_n}) \vee \mathbf{G}$ выводИм дизъюнкт

$$\sigma\ (\mathbf{F}) \vee \sigma\ (\mathbf{G})$$

, где σ – *наиболее общий унификатор* множества $\{\mathbf{P}\ (\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}), \mathbf{P}\ (\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_n})\}$.

Дизъюнкт $\sigma\ (\mathbf{F}) \vee \sigma\ (\mathbf{G})$ называется *бинарной резольвентой*, а литералы $\rceil \mathbf{P}\ (\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n})$ и $\mathbf{P}\ (\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_n})$ *отрезаемыми литералами*.

Правило склейки:

Из дизъюнкта $\lozenge\ \mathbf{P}\ (\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}) \vee \ldots \vee \lozenge\ \mathbf{P}\ (\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_n}) \vee \mathbf{F}$ выводИм дизъюнкт

$$\sigma\ (\lozenge\ \mathbf{P}\ (\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n})) \vee \sigma\ (\mathbf{F})$$

, где σ – *наиболее общий унификатор* множества $\{\mathbf{P}(\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}), \mathbf{P}(\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_n})\}$,

$\lozenge$ – знак отрицания или его отсутствие.

Дизъюнкт $\sigma\ (\lozenge\ \mathbf{P}\ (\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n})) \vee \sigma\ (\mathbf{F})$ называется *склейкой*.

Например,

дизъюнкт $\rceil \mathbf{P}\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \rceil \mathbf{P}\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \vee \rceil \mathbf{P}\ (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \vee \mathbf{Q}\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v})$
даёт склейку $\rceil \mathbf{P}\ (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \vee \mathbf{Q}\ (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{v})$

8.3.5. Вывод из множества дизъюнктов в логике высказываний

Пусть **S** – множество дизъюнктов.

Выводом из **S** называется последовательность дизъюнктов $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}, \ldots, \mathbf{D_n}$ такая, что каждый дизъюнкт этой последовательности принадлежит **S** или следует из предыдущих по правилу резолюций.

Дизъюнкт **D** выводИм из **S**, если существует вывод из **S**, последним дизъюнктом которого является **D**.

Теорема о полноте метода резолюций: Множество дизъюнктов логики высказываний **S** невыполнимо тогда и только тогда, когда из **S** выводИм пустой дизъюнкт □.

Пример 8-4. Вывод в логике высказываний.

Множество дизъюнктов $\mathbf{S} = \{\rceil \mathbf{X} \vee \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}, \rceil \mathbf{Y} \vee \mathbf{U}, \mathbf{X}\}$

Последовательность вывода:

$\mathbf{D_1}$	=	$\rceil \mathbf{X} \vee \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$	(принадлежит **S**)
$\mathbf{D_2}$	=	$\rceil \mathbf{Y} \vee \mathbf{U}$	(принадлежит **S**)

D_3	=	$\rceil X \vee Z \vee U$	(резольвента D_1 и D_2)
D_4	=	X	(принадлежит S)
D	=	$Z \vee U$	(резольвента D_3 и D_4)

8.3.6. Вывод из множества дизъюнктов в логике предикатов

Пусть **S** – множество дизъюнктов.

Выводом из **S** называется последовательность дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ такая, что каждый дизъюнкт этой последовательности принадлежит **S**, выводИм из предыдущих по правилу резолюций или выводИм из предыдущего по правилу склейки.

Дизъюнкт **D** выводИм из **S**, если существует вывод из **S**, последним дизъюнктом которого является **D**.

Пример 8-5. Вывод в логике предикатов.

Множество дизъюнктов

$$S = \{\rceil B(x) \vee \rceil C(x) \vee T(f(x)),\ C(y) \vee T(f(z)),\ B(a)\}$$

Последовательность вывода:

D_1	=	$\rceil B(x) \vee \rceil C(x) \vee T(f(x))$	(принадлежит S)
D_2	=	$C(y) \vee T(f(z))$	(принадлежит S)
D_3	=	$\rceil B(x) \vee T(f(x)) \vee T(f(z))$	(резольвента D_1 и D_2)
D_4	=	$\rceil B(x) \vee T(f(x))$	(склейка D_3)
D_5	=	$B(a)$	(принадлежит S)
D	=	$T(f(a))$	(резольвента D_4 и D_5)

8.3.7. Метод резолюций и логическое следствие

Системы автоматического доказательства используют метод резолюций, впервые описанный *Дж. Робинсоном* в 1965 году. Метод предусматривает использование следующей последовательности доказательства:

1. Сначала к доказываемой формуле применяется операция отрицания.
2. Затем предпринимается попытка доказать, что формула, полученная в результате отрицания, противоречива.

Если полученная в результате отрицания формула действительно является противоречивой, то исходная формула должна представлять собой тавтологию (то есть должна быть истинной при любой интерпретации).

Процесс, направленный на обнаружение противоречия, состоит из последовательного применения правила резолюции к дизъюнктам.

Метод резолюций – это метод доказательства того, что формула **G** является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$.

Задача о логическом следствии сводится к задаче о выполнимости:

Формула **G** есть логическое следствие формул $\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_k}$ тогда и только тогда, когда *множество формул* $\mathbf{\{F_1, F_2, \ldots, F_k, \neg G\}}$ *невыполнимо*.

Особенности метода резолюций:

1. Метод устанавливает **невыполнимость**.
2. Метод оперирует не с произвольными формулами, а с дизъюнктами.

Метод резолюций является обобщением метода *доказательства от противного*. Вместо того чтобы пытаться вывести некоторую формулу-гипотезу из имеющегося непротиворечивого множества аксиом, добавляется отрицание формулы к множеству аксиом и делается попытка вывести из полученного множества противоречие. Если удаётся это сделать, то приходят к выводу (пользуясь законом исключенного третьего), что исходная формула выводИма из множества аксиом.

Процесс применения правила резолюции продолжается до тех пор, пока не получится пустой дизъюнкт. Возможны, вообще говоря, три случая:

1. Этот процесс никогда не завершается.
2. Среди текущего множества дизъюнктов не окажется таких, к которым можно применить правило резолюции. Это означает, что множество дизъюнктов выполнимо, и значит исходная формула не выводИма.
3. На очередном шаге получена пустая резольвента. Это означает, что множество дизъюнктов невыполнимо и, следовательно, начальная формула выводИма.

Имеет место теорема о том, что процесс обязательно завершится за конечное число шагов, если множество дизъюнктов было невыполнимым.

8.3.7.1. Доказательство следствия в логике высказываний

Для доказательства логического следствия в логике высказываний:

1. Составляется множество формул из посылок и отрицания заключения: $\mathbf{T = \{F_1, \ldots, F_k, \neg G\}}$.
2. Каждая из формул из множества приводится к КНФ, и в полученных формулах зачёркиваются знаки конъюнкции. Получается множество дизъюнктов **S**.
3. Ищется вывод пустого дизъюнкта из множества **S**.

Пример 8-6. Доказательство следствия в логике высказываний.

Доказывается, что $\mathbf{G = X \to Y}$ является логическим следствием формул:

$\mathbf{F_1 = X \to Y \vee Z}$ $\mathbf{F_2 = Z \to W}$ $\mathbf{F_3 = \neg W}$

Доказательство:

1. Множество формул: $\mathbf{T = \{F_1, F_2, F_3, \neg G\}}$.
2. Конъюнктивные нормальные формы:
   $\mathbf{F_1 = \neg X \vee Y \vee Z}$
   $\mathbf{F_2 = \neg Z \vee W}$
   $\mathbf{F_3 = \neg W}$
   $\mathbf{\neg G = X \wedge \neg Y}$
   Множество дизъюнктов $\mathbf{S = \{\neg X \vee Y \vee Z, \neg Z \vee W, \neg W, X, \neg Y\}}$
3. Поиск пустого дизъюнкта (рис. 11) по правилу резолюции.

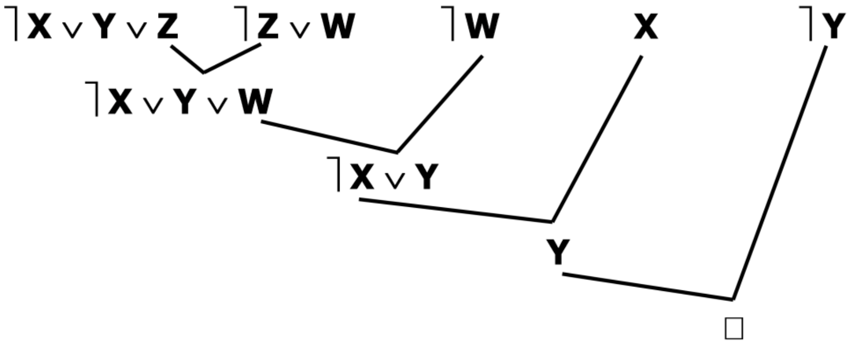

Рис. 11. Поиск пустого дизъюнкта

Из множества **S** выводится □, следовательно, формула **G** является логическим следствием формул $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ и $\mathbf{F_3}$.

8.3.7.2. Доказательство следствия в логике предикатов

Для доказательства логического следствия в логике предикатов:

1. Составляется множество формул из посылок и отрицания заключения: $\mathbf{T = \{F_1, \ldots, F_k, \neg G\}}$.
2. Каждая из этих формул приводится к КНФ. В полученных формулах зачёркиваются кванторы существования и знаки конъюнкции. Получается множество дизъюнктов **S**. Все переменные в дизъюнктах предполагаются связанными кванторами всеобщности.
3. Ищется вывод пустого дизъюнкта из **S**.

Следует помнить, что метод резолюции может применяться лишь в случае, когда формулы $\mathbf{F_1, \ldots, F_k}$ и **G** не имеют свободных переменных.

Пример 8-7. Доказательство следствия в логике предикатов.

Доказывается, что формула $\mathbf{G = \forall\, x\, (C\,(x) \rightarrow \neg Q\,(x))}$ является логическим следствием формул:

$$\mathbf{F_1 = \exists\, x\, [P\,(x) \wedge \forall\, y\, (C\,(y) \rightarrow R\,(x, y))]}$$

$$\mathbf{F_2 = \forall\, x\, \forall\, y\, [P\,(x) \wedge Q\,(y) \rightarrow \neg R\,(x, y)]}$$

Доказательство:

1. Множество формул:

   $\mathbf{T = \{F_1, F_2, \rceil G\}}$

2. Конъюнктивные нормальные формы:

   $\mathbf{F_1 = \forall\, y\, [P\,(a) \wedge (\rceil C\,(y) \vee R\,(a, y))]}$
   $\mathbf{F_2 = \forall\, x\, \forall\, y\, [\rceil P\,(x) \vee \rceil Q\,(y) \vee \rceil R\,(x, y)]}$
   $\mathbf{\rceil G = C\,(в) \wedge Q\,(в)}$

   Множество **S** будет содержать дизъюнкты:

   $\mathbf{D_1 = P\,(a)}$
   $\mathbf{D_2 = \rceil C\,(y) \vee R\,(a, y)}$
   $\mathbf{D_3 = \rceil P\,(x) \vee \rceil Q\,(y) \vee \rceil R\,(x, y)}$
   $\mathbf{D_4 = C\,(в)}$
   $\mathbf{D_5 = Q\,(в)}$

3. Поиск пустого дизъюнкта путём применения правила резолюции:

1-ый родительский дизъюнкт	2-ой родительский дизъюнкт	Резольвента
$D_1 = P\,(a)$	$D_3 = \rceil P\,(x) \vee \rceil Q\,(y) \vee \rceil R\,(x, y)$	$R_1 = \rceil Q\,(y) \vee \rceil R\,(a, y)$
$R_1 = \rceil Q\,(y) \vee \rceil R\,(a, y)$	$D_5 = Q\,(в)$	$\mathbf{R_2 = \rceil R\,(a, b)}$
$D_2 = \rceil C\,(y) \vee R\,(a, y)$	$D_4 = C\,(в)$	$\mathbf{R_3 = R\,(a, в)}$
$R_2 = \rceil R\,(a, b)$	$R_3 = R\,(a, в)$	□

Из множества **S** выводится □, следовательно, формула **G** является логическим следствием формул $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$.

8.3.8. Дизъюнкт Хорна и метод резолюций в логическом программировании

Дизъюнкты, содержащие **не более одного** положительного литерала, называются *дизъюнктами Хорна*, или *хорновскими дизъюнктами*.

Любое правило в *Пролог*-программе имеет вид:

$$\mathbf{A \leftarrow B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n}$$
$$\leftrightarrow$$
$$\mathbf{A \vee \rceil B_1 \vee \rceil B_2\ \vee\ \ldots\ \vee \rceil B_n}$$

, где **A** и $\mathbf{B_i}$ – атомарные формулы.

Негативные литеры $\mathbf{B_i}$ (антецедент) соответствуют подцелям тела правила, а позитивная литера **A** (консеквент) представляет заголовок.

Хорновские дизъюнкты *(Linear resolution with Selection function for Definition clauses)* называют предложениями или клозами.

Факт – это дизъюнкт, который состоит только из одного положительного литерала.

Цель – дизъюнкт, состоящий только из отрицательных литералов.

Правило представляет собой дизъюнкт, который содержит и позитивный, и негативные литералы.

Логической программой называется конечное непустое множество хорновских дизъюнктов.

При выполнении программы к множеству фактов и правил добавляется отрицание вопроса, после чего используется линейная резолюция. Берётся самый левый литерал цели (подцель) и первый унифицируемый с ним дизъюнкт. К ним применяется правило резолюции. Полученная резольвента добавляется в программу в качестве новой цели. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен пустой дизъюнкт (что означает успех) или до тех пор, пока очередную подцель будет невозможно унифицировать ни с одним дизъюнктом программы (что означает неудачу).

В последнем случае включается обратный просмотр (механизм возврата), который осуществляет откат программы к той точке, в которой выбирался унифицирующийся с последней подцелью дизъюнкт. Для этого точка, где выбирался один из возможных унифицируемых с подцелью дизъюнктов, запоминается в специальном стеке, для последующего возврата к ней и выбора альтернативы в случае неудачи. При откате все переменные, которые были означены в результате согласования после этой точки, опять становятся свободными.

Доказательство целевого утверждения заключается в том, чтобы исходя из фактов, правил и отрицания цели получить противоречие (пустой дизъюнкт).